



Neural Network Interest Group

Título/Title:

Introdução à Teoria da Medida

Autor(es)/Author(s):

J.P. Marques de Sá

Relatório Técnico/Technical Report No. 3 /2003

Título/*Title*:

Introdução à Teoria da Medida

Autor(es)/*Author(s)*:

J.P. Marques de Sá

Relatório Técnico/*Technical Report* No. 3 /2003

Publicado por/*Published by*: NNIG. <http://paginas.fe.up.pt/~nnig/>

Outubro 2003



© INEB: FEUP/INEB, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465, Porto, Portugal

Introdução à Teoria da Medida

Texto Tutorial

J.P. Marques de Sá
FEUP – DEEC – 2003
jmsa@fe.up.pt

Índice

1	Classes de Subconjuntos.....	3
1.1	Classe.....	3
1.2	Semi-Anel.....	3
1.3	Anel	4
1.4	Corpo (Álgebra).....	5
1.5	Sigma-Anel (σ -Anel).....	6
1.6	Sigma-Álgebra (σ -Álgebra, σ -Corpo).....	6
1.7	σ -Álgebra de Borel.....	7
2	Medida de Lebesgue.....	8
3	Funções Mensuráveis	10
4	Medida de Probabilidade.....	12
	Bibliografia.....	13

1 Classes de Subconjuntos

O estudo de classes de subconjuntos surge como necessidade de dotar colecções de subconjuntos com uma certa estrutura, que permita tornar a classe fechada relativamente a operações sobre conjuntos, tornando-se, assim, possível dotá-los de uma medida (em particular, a medida de probabilidade).

1.1 Classe

Dado um conjunto X , formamos um conjunto, C , de subconjuntos de X designado *classe* de subconjuntos de X .

$$C = \{A: A \subseteq X\}$$

Exemplo 1-1

A classe $\mathcal{P}(X)$ que contém todos os subconjuntos de X designa-se por vezes "classe das partes de X ". Se X finito, $|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Por exemplo, $X = \{a, b, c\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = X\}$

□

1.2 Semi-Anel

Definição 1-1

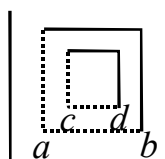
Um semi-anel S é a classe que satisfaz:

- i. $\emptyset \in S$;
- ii. $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$;
- iii. $A, B \in S \Rightarrow A - B = \bigcup_{i=1}^n E_i$ com $E_i \in S$ e $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

■

Exemplo 1-2

$X = \mathfrak{R}^n$; prova-se que a classe $I^n = \{\text{intervalos finitos semiabertos de } \mathfrak{R}^n \text{ do tipo } \{(x_1, \dots, x_n): a_i < x_i \leq b_i\}\}$ é um semi-anel.



Na situação da figura, para I^2 , temos: $A =]a, b] \times]a, b]$; $B =]c, d] \times]c, d]$; $A - B = \{]a, b] \times]a, c] \cup]a, c] \times]c, d] \cup]a, b] \times]c, b] \cup]d, b] \times]c, d]\}$. O mesmo se aplica a outros "rectângulos". A verificação de i. e ii. é trivial.

Note-se, contudo, que $A - B$ não pertence a I^2 .

□

Exemplo 1-3

Para o caso particular do exemplo anterior com $X = \mathfrak{R}$, temos a classe $I = I^1 = \{\text{intervalos finitos semiabertos do tipo }]a, b]\}$. O facto de ser um semi-anel reflecte-se no facto de que, com operações de intersecção, se geram elementos de I e, com diferenças, se geram conjuntos construíveis como reuniões de elementos disjuntos de I . (É esta a "estrutura" do semi-anel.)

□

Exemplo 1-4

Seja $X = \mathfrak{R}$, e a classe $C = \{\text{intervalos fechados } [a, b]\}$. Não é um semi-anel. P. ex., $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, com $a < c$ e $b > d$, pertencem a C ; mas $A - B$ não é construível com reuniões de elementos disjuntos de C . \square

1.3 Anel**Definição 1-2**

Um anel é qualquer classe \mathcal{R} não vazia tal que

- i. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
- ii. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{R}$. ($A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ é a diferença simétrica) \blacksquare

Notar que, então, também é satisfeita a propriedade i. dos semi-anéis ($\emptyset = A \Delta A$). Por outro lado, $A \Delta B \in \mathcal{R} \Rightarrow A - B \in \mathcal{R}$ (porque $A - B = A \Delta (A \cap B)$). Esta condição é mais forte que a anterior iii. dos semi-anéis. Um anel é, portanto, fechado para as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos.

Exemplo 1-5

$\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ são anéis. $\{\emptyset\}$ é o menor anel. \square

Exemplo 1-6

I não é um anel. P. ex., $A =]a, b]$, $B =]c, d]$, com $a < c$ e $b > d$, pertencem a I ; mas $A - B \notin I$. \square

Teorema 1-1

A classe $\mathcal{C}(S)$ gerada pelo semi-anel S , cujos elementos se podem exprimir como reunião finita de conjuntos disjuntos de S , $E = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, é um anel.

Demonstração:

$\mathcal{C}(S)$ tem de conter todos os conjuntos que se exprimem como reunião finita de conjuntos disjuntos de S , por forma a ser fechado relativamente à reunião, como exige o anel.

Por outro lado, suponhamos que tínhamos quaisquer conjuntos: $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$ e sejam as intersecções $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Então os C_{ij} são disjuntos e

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m C_{ij} \in \mathcal{C}(S)$$

Por outro lado, da definição de semi-anel, segue-se por indução que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^m C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \quad (i = 1, \dots, n) \text{ e } B_j = \bigcup_{i=1}^n C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj} \quad (j = 1, \dots, m)$$

com as seqüências finitas $\{D_{ik}\}$ ($k = 1, \dots, r_i$) e $\{E_{kj}\}$ ($k = 1, \dots, s_j$) consistindo em conjuntos disjuntos de S . Logo,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \right) \cup \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj} \right) \in C(S)$$

■

Exemplo 1-7

$C(I)$, gerada da forma acima, é um anel. Para os conjuntos indicados no Exemplo 1-6 temos $A - B =]a, c] \cup]d, b] \in C(I)$.

□

1.4 Corpo (Álgebra)

Corresponde a uma classe de X que é anel mas é também fechada relativamente à operação de complemento (designado por "field", em inglês).

Definição 1-3

Classe não vazia, \mathcal{F} , que satisfaz:

- i. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$;
- ii. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$.

■

Note-se que, sendo fechado para o complemento, podemos aplicar as Leis de Morgan e facilmente mostrar que:

$$A \cap B \in \mathcal{F}; \quad A - B \in \mathcal{F}; \quad \emptyset \in \mathcal{F}; \quad X \in \mathcal{F}.$$

Portanto, um corpo é necessariamente uma classe não vazia porque tem de conter X .

Exemplo 1-8

$\mathcal{P}(X)$ é um corpo.

□

Exemplo 1-9

A classe de todos os subconjuntos limitados de \mathfrak{R} é um anel mas não é um corpo (p. ex., não contém \mathfrak{R}).

□

Exemplo 1-10

$X = \mathfrak{R}^n$; seja a classe $\mathfrak{T}^n = \{\text{intervalos de } \mathfrak{R}^n \text{ do tipo } \{(x_1, \dots, x_n): -\infty \leq a_i < x_i \leq b_i < \infty, i = 1, \dots, n\}\}$. Portanto, os intervalos semiabertos de \mathfrak{T}^n podem estender-se infinitamente à esquerda. Prova-se que, então, $\mathcal{E} = C(\mathfrak{T}^n)$ definida como no Teorema 1-1, é um corpo. Os intervalos de \mathfrak{T}^n designam-se por *rectângulos* ou *caixas* de \mathfrak{R}^n .

\mathcal{E} é o corpo das *figuras elementares* de \mathfrak{R}^n . Prova-se que \mathcal{E} é a menor álgebra que contém \mathfrak{T}^n .

□

Exemplo 1-11

Seja o intervalo $\Omega =]0, 1]$. Podemos, tal como no exemplo anterior, construir o corpo \mathcal{B}_0 a partir de reuniões finitas de intervalos semiabertos disjuntos:

$$A = \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i]$$

□

1.5 Sigma-Anel (σ -Anel)

Trata-se de um anel que é fechado relativamente à realização de uma sequência numerável de reuniões ("sigma" vem do alemão "summe" de soma = reunião):

$$A_i \in \mathcal{S} \quad (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$$

Note-se que, então, pelas propriedades do anel, é também fechado para intersecções numeráveis.

1.6 Sigma-Álgebra (σ -Álgebra, σ -Corpo)

Trata-se de uma álgebra que é fechada relativamente à realização de uma sequência numerável de reuniões.

Definição 1-4

Uma σ -álgebra \mathcal{A} definida em X , satisfaz:

- i. $X \in \mathcal{A}$ (portanto, \mathcal{A} é não vazia)
- ii. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (logo, também $\emptyset \in \mathcal{A}$)
- iii. $A_i \in \mathcal{A} \quad (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

■

Ao par (X, \mathcal{A}) chama-se *espaço mensurável*. Os elementos de \mathcal{A} chamam-se *conjuntos mensuráveis*.

Dois resultados:

1. Se \mathcal{A} é uma σ -álgebra para um conjunto X , e X' é um subconjunto de X , então $X' \cap \mathcal{A}$, formada por todas as intersecções de elementos de \mathcal{A} cuja com X' , é também uma σ -álgebra (chamada *traço* de \mathcal{A} em X').
2. Sejam os conjuntos X e X' , e \mathcal{A}' uma σ -álgebra em X' . Seja a função $f: X \rightarrow X'$. Então a classe

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

é uma σ -álgebra em X .

Exemplo 1-12

A menor σ -álgebra é $\{\emptyset, X\}$. $\mathcal{P}(X)$ é uma σ -álgebra. □

Exemplo 1-13

Seja $X = \{a, b, c\}$. Então (resultado 1.), são σ -álgebras os traços de $\mathcal{P}(X)$ em $\{b\}$ e $\{b, c\}$, respectivamente $\mathcal{P}(X) \cap \{b\} = \{\emptyset, \{b\}\}$ e $\mathcal{P}(X) \cap \{b, c\} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. □

Exemplo 1-14

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $X' = \{0, 1\}$. Definamos $\mathcal{A}' = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ e

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow X' \\ a &\rightarrow 0 \\ b &\rightarrow 1 \\ c &\rightarrow 0 \end{aligned} ;$$

então $f^{-1}(\mathcal{A}') = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ é uma σ -álgebra em X (resultado 2.). □

Exemplo 1-15

Para todo o conjunto X , a classe de todos os subconjuntos $A \subset X$, para os quais ou A ou \bar{A} são numeráveis, é uma σ -álgebra. □

Teorema 1-2

Qualquer intersecção finita ou numerável de σ -álgebras em X é uma σ -álgebra em X . ■

Aplicando este Teorema é possível mostrar que, para cada classe C de X , existe a *menor σ -álgebra* $\mathcal{A}(C)$ contendo C . Para tal basta considerar a intersecção de todas as σ -álgebras que contêm C ($\mathcal{P}(X)$ é uma delas). $\mathcal{A}(C)$ é chamada a *σ -álgebra gerada* por C .

1.7 σ -Álgebra de Borel

Definição 1-5

A σ -álgebra gerada por \mathfrak{T}^n , $\mathcal{A}(\mathfrak{T}^n)$, designa-se por *σ -álgebra de Borel* e denota-se $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(\mathfrak{T}^n)$. Os elementos de \mathcal{B}^n chamam-se *conjuntos de Borel*. □

Teorema 1-3

Sejam O^n , F^n , C^n as classes dos subconjuntos abertos, fechados e compactos¹ de \mathfrak{R}^n , respectivamente. Então:

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(O^n) = \mathcal{A}(F^n) = \mathcal{A}(C^n)$$
■

¹ Conjuntos fechados e limitados, i.e., contendo todos os seus pontos limites.

Segundo este Teorema, \mathcal{B}^n contém não só numeráveis reuniões e intersecções de intervalos semiabertos, mas também numeráveis reuniões e intersecções de intervalos abertos, fechados e de pontos isolados². Os conjuntos que se podem assim formar suportam medidas, nomeadamente a medida de probabilidade. Constituem os conjuntos de interesse nas aplicações práticas. Existem, contudo, conjuntos patológicos, de difícil construção e sem interesse prático, que não são de Borel. Veremos isso mais adiante.

2 Medida de Lebesgue

A definição do corpo \mathcal{E} das figuras elementares de \mathfrak{R}^n introduz a estrutura mínima de uma classe que permite definir uma função de medida. Começemos por definir o *volume (comprimento) de Lebesgue*.

Seja:

$$A \in \mathfrak{T}^n; A \text{ é o produto cartesiano de } n \text{ intervalos } \{x_i \in \mathfrak{R}: -\infty < a_i < x_i \leq b_i \leq \infty\}$$

O volume é:

$$m(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad 2.1$$

$m(A)$ é zero se algum par de extremos dos intervalos tem o mesmo valor; é infinito se algum extremo for infinito.

Vamos, agora, estender esta função para a σ -álgebra de Borel.

Dado $B \in \mathcal{B}^n$, tal que $B = \bigcup_{j=1}^k A_j$ com $A_j \in \mathfrak{T}^n$ e disjuntos, define-se o volume de B :

$$\bar{m}(B) = \sum_{j=1}^k m(A_j) \quad 2.2$$

Esta função só tem sentido se não depender da representação particular de B . De facto, prova-se que:

Teorema 2-1

A função \bar{m} em \mathcal{B}^n dada por 2.2 é univocamente definida, não-negativa, aditiva, monótona, e coincide com m em \mathfrak{T}^n . Assim:

- i. $A \subset B, A, B \in \mathcal{B}^n \Rightarrow 0 \leq \bar{m}(A) \leq \bar{m}(B)$
- ii. $\{A, B\} \subset \mathcal{B}^n, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{m}(A + B) = \bar{m}(A) + \bar{m}(B)$
- iii. $\bar{m}(A) = m(A), \forall A \in \mathfrak{T}^n$

■

Além disso:

² Um ponto isolado $\{x\}$ pode obter-se como intersecção de uma sequência infinita numerável de intervalos $]x - 1/n, x]$, $n = 1, 2, \dots$. Note-se que no caso de uma sequência finita, como no Teorema 1-1 não poderíamos gerar, p. ex., um ponto isolado.

Teorema 2-2

A função \bar{m} é numeravelmente aditiva, i.e., dada a família de elementos disjuntos $A_k \in \mathcal{B}^n$, se $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (logo, pertence a \mathcal{B}^n), então

$$\bar{m}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{m}(A_k)$$

■

Uma função $\mu: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{R}^+$, de uma σ -álgebra \mathcal{E} em \mathfrak{R}^+ , é chamada uma *medida* se for numeravelmente aditiva (onde a série converge). A anterior medida \bar{m} definida no conjunto de Borel, que passaremos a designar por μ , é chamada *medida de Lebesgue-Borel (medida LB)*.

Um espaço mensurável (X, \mathcal{A}) dotado de uma medida m , i.e., o triplo (X, \mathcal{A}, m) , chama-se um *espaço de medida*. $(\mathfrak{T}^n, \mathcal{B}^n, \mu)$ é o *espaço de medida de Lebesgue-Borel*.

Algumas propriedades da medida LB:

1. $\mu(B) < +\infty$, para todo o conjunto limitado $B \in \mathcal{B}^n$.
2. Qualquer hiperplano H em \mathfrak{R}^n é um conjunto LB-nulo, i.e., $\mu(H) = 0$.
3. Qualquer subconjunto numerável de \mathfrak{R}^n é um conjunto LB-nulo, em particular $\mu(Q) = 0$.
4. Seja $W \equiv [0,1]$ o cubo unitário n -dimensional. Então, por definição, $\mu(W) = 1$.
5. A medida LB é a única medida em \mathcal{B}^n que é invariante à translação, i.e., $T_a(\mu) = \mu$, para toda a translação $x \rightarrow T_a(x) = a + x$, e que satisfaz a condição de normalização $\mu(W) = 1$.
6. A medida LB é invariante relativamente a transformações ortogonais dos eixos.

O seguinte Teorema, que usa a propriedade 5, mostra que \mathcal{B}^n não esgota $\mathcal{P}(\mathfrak{R}^n)$. Por outras palavras, existem subconjuntos de \mathfrak{R}^n que não se podem construir à custa de reuniões e intersecções numeráveis de rectângulos de \mathfrak{T}^n .

Teorema 2-3

$$\mathcal{B}^n \neq \mathcal{P}(\mathfrak{R}^n), \forall n = 1, 2, \dots$$

Demonstração:

Vamos indicar como se constrói um conjunto patológico. Por uma questão de facilitar a "visualização mental" a construção será em \mathfrak{R} . Contudo, a generalização para \mathfrak{R}^n é directa. Para tal vamos usar o:

Axioma da Escolha:

Dado uma classe C de conjuntos disjuntos e não vazios E_α , existe um conjunto $G \subset \cup E_\alpha$ tal que, para todo o E_α , $G \cap E_\alpha$ é apenas um conjunto pontual de E_α .

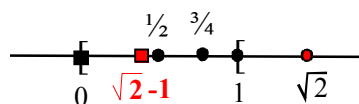
(A construção de um conjunto que tem apenas um ponto de uma colecção disjunta de subconjuntos é certamente trivial no caso da colecção ser finita ou numerável. O axioma da escolha estipula que tal construção é também possível no caso de colecções não numeráveis.)

Seja $Q \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos racionais. Consideremos a relação binária de congruência $x \sim y$ em \mathbb{R} :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Q$$

A relação $x \sim y$ é de equivalência e estabelece uma divisão de \mathbb{R} em classes de equivalência $C_x = \{x + Q\}$. A classe de equivalência de todos os racionais é C_0 . Como para todo o real η existe um inteiro n tal que $n \leq \eta < n + 1$, ou seja, $\eta - n \in [0, 1[$, então existe um ponto em $[0, 1[$ para qualquer classe de equivalência.

Alguns pontos de C_0 e $C_{\sqrt{2}}$:



Então, pelo axioma da escolha, existe um conjunto $K \subset [0, 1[$ tal que tem exactamente um ponto de cada classe de equivalência. Logo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{y \in Q} \{y + K\} \quad \text{e} \quad y_1 \neq y_2 \Rightarrow \{y_1 + K\} \cap \{y_2 + K\} = \emptyset \quad (y_1, y_2 \in Q)$$

Suponhamos que $K \in \mathcal{B}$. Então é aplicável a medida de Lebesgue. Como Q é numerável, temos:

$$+\infty = \mu(\mathbb{R}) = \sum_{y \in Q} \mu(y + K) = \sum_{y \in Q} \mu(K) \Rightarrow \mu(K) \neq 0$$

Propriedade 5.

Mas:

$$\bigcup_{y \in [0,1[\cap Q} (y + K) \subset [0,2[$$

Logo:

$$\sum_{y \in [0,1[\cap Q} \mu(y + K) \leq \mu([0,2[) = 2 \Rightarrow \sum_{y \in [0,1[\cap Q} \mu(K) < +\infty \Rightarrow \mu(K) = 0$$

Chegamos a uma contradição. Logo, $K \notin \mathcal{B}$. ■

3 Funções Mensuráveis

Definição 3-1

Sejam (X, \mathcal{A}) e (X', \mathcal{A}') espaços mensuráveis. A função $f: X \rightarrow X'$ diz-se uma *função \mathcal{A} - \mathcal{A}' mensurável* se:

$$f^{-1}(X') \in \mathcal{A} \quad \text{para todo o } X' \in \mathcal{A}' \quad (\text{ou seja } f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A})$$
■

Exemplo 3-1

Qualquer mapeamento constante $f: X \rightarrow X'$ é \mathcal{A} - \mathcal{A}' mensurável.

□

Exemplo 3-2

O Exemplo 1.14 estabelece uma função mensurável.

□

Teorema 3-1

Seja $f: X \rightarrow X'$ uma função \mathcal{A} - \mathcal{A}' mensurável. Então, para toda a medida μ em \mathcal{A} ,

$$\mu'(A') = \mu(f^{-1}(A'))$$

define uma medida μ' em \mathcal{A}' .

■

Exemplo 3-3

Seja o espaço de medida $(\mathfrak{R}, \mathcal{A}, \mu)$ em que \mathcal{A} é a σ -álgebra que contém todos os subconjuntos A numeráveis ou não-numeráveis de \mathfrak{R} e $\mu(A) = 0$ ou 1 conforme A ou \bar{A} é numerável. Seja $X' = \{0, 1\}$ e $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(X')$ e a função $f: X \rightarrow X'$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in \bar{Q} \end{cases}$$

Provar que a função f é \mathcal{A} - \mathcal{A}' mensurável e determinar $f(\mu)$.

Temos:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{0\}) = Q \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{1\}) = \bar{Q} \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{0,1\}) = \mathfrak{R} \in \mathcal{A}.$$

Logo, a função é mensurável e $\mu' = f(\mu)$ é igual a 0 para \emptyset e $\{0\}$ e igual a 1 para $\{1\}$ e $\{0,1\}$.

□

Exemplo 3-4

Sejam dados os espaços mensuráveis³ $(\mathfrak{R}, \mathcal{B}), (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$, um conjunto $A \in \mathcal{B}$ e a função indicadora $I_A: \mathfrak{R} \rightarrow \{0,1\}$:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \bar{A} \end{cases}$$

Temos:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{0\}) = \bar{A} \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{0,1\}) = \mathfrak{R} \in \mathcal{B}.$$

Logo, a função indicadora é \mathcal{B} - $\mathcal{P}(\{0,1\})$ mensurável.

□

³ Note-se que pelo Teorema 1-3 a definição de \mathcal{B} pode exprimir-se em termos de vários conjuntos suporte de \mathfrak{R} : $O, F, C...$ Assim, usa-se a notação $(\mathfrak{R}, \mathcal{B})$. (Isto é abusivo porque já vimos que há subconjuntos de \mathfrak{R} que não pertencem a \mathcal{B} .)

Definição 3-2

Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e $(\mathfrak{R}, \mathcal{B})$ o espaço mensurável de Borel em \mathfrak{R} . A função $f: X \rightarrow \mathfrak{R}$ diz-se uma *função mensurável* se:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ para todo o } B \in \mathcal{B} \text{ (ou seja } f^{-1}(B) \subset \mathcal{A} \text{)}$$

■

Pode-se mostrar que o conjunto das funções mensuráveis é fechado relativamente à adição, subtração, multiplicação e divisão.

4 Medida de Probabilidade

Definição 4-1

Seja P uma função de conjuntos definida num corpo \mathcal{F} . A função é uma *medida de probabilidade* se satisfaz às condições seguintes:

- i. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo o $A \in \mathcal{F}$;
- ii. $P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$;
- iii. Dada uma sequência de conjuntos disjuntos A_1, A_2, \dots , com $A_i \in \mathcal{F}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (*aditividade numerável*).

■

Exemplo 4-1

Seja o corpo \mathcal{B}_0 do Exemplo 1.11, definido em $]0, 1]$. É possível mostrar que a medida de Lebesgue $P(A) = \overline{m}(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ é não só finita mas também numeravelmente aditiva; logo, P define uma medida de probabilidade no corpo \mathcal{B}_0 .

□

É possível provar que uma medida de probabilidade definida num corpo \mathcal{F} pode estender-se à σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}, \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Este aspecto é importante visto estarmos interessados em lidar com aditividade numerável para a medida de probabilidade. Assim:

Definição 4-2

Se \mathcal{A} é uma σ -álgebra em X e P é uma medida de probabilidade em \mathcal{A} , então o triplo (X, \mathcal{A}, P) é chamado um *espaço de medida de probabilidade*, ou simplesmente *espaço de probabilidade*.

■

Teorema 4-1 (da extensão)

Uma medida de probabilidade definida num corpo \mathcal{F} tem uma extensão única para a σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}, \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

■

A referência [2] indica como construir a extensão.

Exemplo 4-2

Seja $\Omega =]0, 1]$. Para cada $\omega \in \Omega$ vamos associar a expansão diádica infinita e numerável:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n} \quad \text{com} \quad d_n(\omega) \in \{0,1\}$$

(i.e. são os bits da representação binária infinita)

0				1			
00		01		10		11	
000	001	010	011	100	101	110	111

Para cada sequência u_1, \dots, u_n , de comprimento n (tal como no lançamento de uma moeda n vezes), temos:

$$\{\omega : d_i(\omega) = u_i, i = 1, \dots, n\} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right).$$

Logo, usando a medida de Lebesgue-Borel como medida de probabilidade, temos:

$$P(\{\omega : d_i(\omega) = u_i, i = 1, \dots, n\}) = \frac{1}{2^n}$$

Considere-se o conjunto:

$$N = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i(\omega) = \frac{1}{2} \right\}$$

Os pontos do conjunto N são chamados *números normais*. A Lei Forte dos Grandes Números, aplicada a esta situação, escreve-se $P(N) = 1$. Ora, é possível provar que \bar{N} é LB-nulo, logo $P(\bar{N}) = 0$.

□

Bibliografia

1. Bauer H (1972) Probability Theory and Elements of Measure Theory. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
2. Billingsley P (1979) Probability and Measure. John Wiley & Sons, Inc.
3. Papoulis A (1965) Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mc Graw Hill.
4. Rao MM (1987) Measure Theory and Integration. John Wiley & Sons, Inc.
5. Rudin W (1987) Real and Complex Analysis. McGraw-Hill.
6. Taylor SJ (1966) Introduction to Measure and Integration. Cambridge University Press.